

# Druckerhöhung und Wärmeleitfähigkeit in einem zylindersymmetrischen Wasserstoffplasma im axialen Magnetfeld unter Berücksichtigung von Thermokräften

J. RAEDER und S. WIRTZ

Institut für Plasmaphysik, 8046 Garching bei München

(Z. Naturforsch. 23 a, 1695—1706 [1968]; eingegangen am 13. August 1968)

The pressure increase and total thermal conductivity are calculated for an infinitely long hydrogen plasma column in an axial magnetic field. The calculations, which are based on the first and third moments of the Boltzmann equations for atoms, ions and electrons, are carried out under the assumption of local thermal equilibrium. Numerical results are given for magnetic fields up to 150 kG, temperatures to  $10^6$  °K and external pressures ranging from  $10^3$  to  $10^5$  dyne/cm<sup>2</sup>. Comparison of these results with previous calculations, which neglect thermal forces, shows that they cause an increase of pressure also in the completely ionized plasma and therefore modify the thermal conductivity indirectly.

Überlagert man einer zylindersymmetrischen Bogenentladung ein homogenes, axiales Magnetfeld, so verursacht dieses einen Anstieg des Gesamtdruckes vom Bogenrand zu den heißen Zonen im Inneren hin. Die Ursache dafür sind radial nach innen gerichtete Kräfte, die aus der Wechselwirkung des Magnetfeldes mit azimuthalen Strömen resultieren. Diese kann man im Bereich teilweiser Ionisation im wesentlichen auf die gemeinsam nach außen diffundierenden Ionen und Elektronen (ambipolare Diffusion) zurückführen, die durch das Magnetfeld in zueinander entgegengesetzten Richtungen azimuthal abgelenkt werden. Die Ergebnisse der von WIENECKE<sup>1</sup> durchgeführten Rechnungen für diesen Fall werden durch Messungen von DÖBELE<sup>2</sup> an einem Wasserstoffbogen im Bereich teilweiser Ionisation bestätigt. Bei vollständiger Ionisation ergibt diese Theorie einen konstanten Druck, da dann der ambipolare Diffusionsstrom verschwindet. Dagegen liefern Messungen von GRASSMANN, KLÜBER und WULFF<sup>3</sup> an einem Heliumplasma und von MAHN, RINGLER und ZANKL<sup>4</sup> an einem Wasserstoffplasma auch im Be-

reich vollständiger Ionisation eine weitere Zunahme des Druckes mit der Temperatur. Der Grund dafür sind wiederum azimuthale Ströme, die im vollionisierten Plasma allerdings durch den Einfluß des Magnetfeldes auf die Thermodiffusion, den Nernst-Effekt (proportional zu  $\nabla T \times \mathbf{B}$ ), verursacht werden.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung des Druckaufbaues und des radialen Wärmestromes in einem zylindersymmetrischen Wasserstoffplasma unter Berücksichtigung der Thermodiffusionseffekte in den Momentengleichungen der Plasmakomponenten im Temperaturbereich von  $6 \cdot 10^3 - 10^6$  °K.

## I. Grundgleichungen und Annahmen

Als Ausgangspunkt dienen die von FENEBERG<sup>5</sup> angegebenen Gleichungen für das erste und dritte Moment der Boltzmann-Gleichungen eines Dreiteilchensystems aus Neutralteilchen, Ionen und Elektronen.

### 1. Moment:

$$\nabla p_0 = -m_0 n_0 \nu_{0i} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i) + m_e n_e \nu_{e0} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) + \frac{m_i}{5kT} \nu_{i0} \mathbf{S}_i - \frac{m_i}{5kT} \nu_{0i} \mathbf{S}_0 + \frac{m_e}{5kT} \nu_{e0} \mathbf{S}_e, \quad (1a)$$

$$\nabla p_i - n_i e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) = -m_i n_i \nu_{i0} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0) + m_e n_e \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - \frac{3m_e}{5kT} \nu_{ei} \mathbf{S}_e - \frac{m_i}{5kT} \nu_{i0} \mathbf{S}_i + \frac{m_i}{5kT} \nu_{0i} \mathbf{S}_0, \quad (1b)$$

$$\nabla p_e + n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) = -m_e n_e \nu_{e0} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) - m_e n_e \nu_{ei} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) + \frac{3m_e}{5kT} \nu_{ei} \mathbf{S}_e - \frac{m_e}{5kT} \nu_{e0} \mathbf{S}_e; \quad (1c)$$

<sup>1</sup> R. WIENECKE, Z. Naturforsch. 18 a, 1151 [1963].

<sup>2</sup> H. F. DÖBELE, R. WIENECKE u. S. WITKOWSKI, Z. Naturforsch. 21 a, 390 [1966].

<sup>3</sup> P. H. GRASSMANN, O. KLÜBER u. H. WULFF, Phys. Lett. 24 a, 324 [1967].

<sup>4</sup> C. MAHN, H. RINGLER u. G. ZANKL, Z. Naturforsch. 23 a, 867 [1968].

<sup>5</sup> W. FENEBERG, wird veröffentlicht.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

## 3. Moment:

$$\frac{5}{2} \frac{p_0}{m_i} \nabla(kT) = - \frac{p_0}{2} \nu_{0i}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_i) + \mathbf{S}_i(0,825 \nu_{i0}) - \mathbf{S}_0(0,8 \nu_{00} + 0,825 \nu_{0i}), \quad (2a)$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i} \nabla(kT) - \mathbf{S}_i \times \boldsymbol{\Omega} = - \frac{p_i}{2} \nu_{i0}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0) - \mathbf{S}_i(0,4 \nu_{ii} + 0,825 \nu_{i0}) + \mathbf{S}_0(0,825 \nu_{0i}), \quad (2b)$$

$$\frac{5}{2} \frac{p_e}{m_e} \nabla(kT) + \mathbf{S}_e \times \boldsymbol{\omega} = - \frac{p_e}{2} \nu_{e0}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) + \frac{3}{2} p_e \nu_{ei}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) - \mathbf{S}_e(1,3 \nu_{e0}) - \mathbf{S}_e \nu_{ei}(1,3 + \frac{2}{5} \sqrt{2}). \quad (2c)$$

$\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_i$ ,  $\mathbf{S}_e$  sind die Wärmestromdichten der Atome, Ionen und Elektronen.

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{m_i} \mathbf{B} = \frac{eB}{m_i} \mathbf{h} = \Omega \mathbf{h}$$

und  $\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{m_e} \mathbf{B} = \frac{eB}{m_e} \mathbf{h} = \omega \mathbf{h}$

sind die Gyrofrequenzen der Ionen und der Elektronen. Die Formeln für die verschiedenen Stoßfrequenzen  $\nu$  für Impulsaustausch sind in der Zusammenstellung der im folgenden verwendeten Abkürzungen am Ende der Arbeit angegeben.

Die Gln. (1a) bis (2c) wurden unter folgenden Voraussetzungen abgeleitet, bzw. enthalten folgende Näherungen:

- Alle Vorgänge sind stationär.
- Die Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht seien so klein, daß die Transportgleichungen in guter Näherung linear sind.
- Alle Teilchensorten haben die gleiche Temperatur.
- Der Druck wird isotrop angenommen.
- Die Gleichungen gelten nur für nicht zu kleine  $\omega \tau_e$  ( $\omega \tau_e > 1$ ), d. h. sie stellen nur für Transportvorgänge senkrecht zu einem starken Magnetfeld eine gute Näherung dar.
- Unelastische Stöße werden in den Momentengleichungen nicht berücksichtigt.
- Für die Stöße zwischen Wasserstoffatomen und -ionen wird der Stoßquerschnitt, der nur zu Richtungsänderungen führt, gegen den Umladungsquerschnitt vernachlässigt. Dieser ist für Stöße von Atomen mit ihren Ionen besonders groß, da dabei ein Resonanzeffekt auftritt<sup>6</sup>. Der Umladungsquerschnitt  $Q_{i0}$  wird konstant gesetzt. Das ist für Wasserstoff in dem Temperaturbereich, in dem er wesentlich ist (etwa 6000–20 000 °K), eine gute Näherung<sup>7,8</sup>. Der Faktor 16 in der Formel für  $Q_{i0}$  ge-

genüber dem Faktor 8 bei  $Q_{00}$  tritt auf, weil der Umladungseffekt zu einem Impulsaustauschquerschnitt führt, der in guter Näherung doppelt so groß ist wie der Umladungsquerschnitt  $Q_{i0}$ <sup>9</sup>.

h) Die Stoßquerschnitte für Impulsaustausch  $Q_{00}$  und  $Q_{e0}$  werden konstant gesetzt.

i) Der Einfluß des Magnetfeldes auf die Stoßprozesse geladener Teilchen wird vernachlässigt, d. h. der Larmor-Radius muß wesentlich größer als die Debye-Länge sein.

Die Bewegungsgleichung des gesamten Plasmas

$$\nabla p - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

mit

$$p = p_0 + p_i + p_e = p_0 + p_L$$

ergibt sich als Summe der Gln. (1a), (1b) und (1c).

## 2. Berechnung des Druckverlaufes $p(T)$

### 2.1. Elimination der Wärmeströme $\mathbf{S}_0$ , $\mathbf{S}_i$ und $\mathbf{S}_e$ aus den Momentengleichungen

Um den Druckverlauf  $p(T)$  berechnen zu können, werden die Wärmeströme  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{S}_e$  aus den Gleichungen für die dritten Momente (2a), (2b) und (2c) ausgerechnet und in die Impulsbilanzen (1a), (1b), (1c) eingesetzt. Die Gl. (2c) hat die Form:

$$\omega \mathbf{S}_e \times \mathbf{h} + \frac{1}{\tau_e} \mathbf{S}_e = -\mathbf{A}$$

mit 
$$\mathbf{A} = \frac{5}{2} \frac{p_e}{m_e} \nabla(kT) + \frac{p_e}{2} \nu_{e0}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) - \frac{3}{2} p_e \nu_{ei}(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

und 
$$\frac{1}{\tau_e} = 1,3 \nu_{e0} + (1,3 + \frac{5}{2} \sqrt{2}) \nu_{ei}.$$

Zerlegt man die Vektoren  $\mathbf{S}_e$  und  $\mathbf{A}$  in ihre Anteile  $\mathbf{S}_{e\parallel}$ ,  $\mathbf{S}_{e\perp}$  bzw.  $\mathbf{A}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{A}_{\perp}$  parallel und senkrecht zum

<sup>6</sup> E. W. McDANIEL, Collision Phenomena in Ionized Gases, John Wiley & Sons Inc., New York 1964.

<sup>7</sup> N. T. GRIER, NASA TN D-3186.

<sup>8</sup> R. S. DEVOTO, wird veröffentlicht.

<sup>9</sup> A. DALGARNO, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 250, 426

Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\mathbf{S}_{e\parallel} = -\tau_e \mathbf{A}_{\parallel}, \quad (4a)$$

$$\mathbf{S}_{e\perp} = -\frac{\tau_e}{1+(\omega\tau_e)^2} \mathbf{A}_{\perp} + \frac{\omega\tau_e^2}{1+(\omega\tau_e)^2} \mathbf{A} \times \mathbf{h}. \quad (4b)$$

$\mathbf{S}_0$  aus Gl. (2a) ausgerechnet und in Gl. (2b) eingesetzt ergibt:

$$\frac{1}{\tau_i} \mathbf{S}_i - \Omega \mathbf{S}_i \times \mathbf{h} = -\mathbf{C}$$

mit

$$\mathbf{C} = \frac{5}{2} \frac{p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \nabla(kT) + \frac{p_i}{2} \nu_{i0} \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}} \right) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)$$

und

$$\frac{1}{\tau_i} = 0,4 \nu_{ii} + 0,825 \nu_{i0} - 0,825 \nu_{oi} \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}$$

$$= \frac{1}{\tau_{ii}} + \frac{1}{\tau_{i0}} - \frac{\tau_0}{\tau_{i0} \tau_{oi}}.$$

Damit erhält man:

$$\mathbf{S}_{i\parallel} = -\tau_i \mathbf{C}_{\parallel}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{S}_{i\perp} = -\frac{\tau_i}{1+(\Omega\tau_i)^2} \mathbf{C}_{\perp} - \frac{\Omega\tau_i^2}{1+(\Omega\tau_i)^2} \mathbf{C} \times \mathbf{h}. \quad (5b)$$

Setzt man die Wärmeströme  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{S}_i$  und  $\mathbf{S}_e$  in die Impulsbilanz (1c) der Elektronen ein und verwendet die Zustandsgleichung  $p_{\alpha} = n_{\alpha} k T$  ( $\alpha = 0, i, e$ ), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla p_e + n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) &= -\varrho_e \nu_{e0} [\alpha_1 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0)_{\parallel} + \alpha_2 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0)_{\perp} \\ &+ \alpha_3 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{h} + \alpha_1' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_{\parallel} + \alpha_2' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_{\perp} \\ &+ \alpha_3' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{h}] - \varrho_e \nu_{ei} [\gamma_1 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0)_{\parallel} \\ &+ \gamma_2 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0)_{\perp} + \gamma_3 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{h} \\ &+ \gamma_1' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_{\parallel} + \gamma_2' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_{\perp} \\ &+ \gamma_3' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{h}] + \varrho_e \nu_{e0} [\alpha_1'' \nabla_{\parallel} T + \alpha_2'' \nabla_{\perp} T \\ &+ \alpha_3'' \nabla T \times \mathbf{h}] + \varrho_e \nu_{ei} [\gamma_1'' T \\ &+ \gamma_2'' \nabla_{\perp} T + \gamma_3'' \nabla T \times \mathbf{h}] \end{aligned} \quad (6)$$

mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - 0,1 \tau_e \nu_{e0}, & \alpha_1' &= 0,3 \tau_e \nu_{ei}, \\ \alpha_2 &= 1 - 0,1 k_e \nu_{e0}, & \alpha_2' &= 0,3 k_e \nu_{ei}, \\ \alpha_3 &= 0,1 k_e \nu_{e0} \omega \tau_e, & \alpha_3' &= -0,3 k_e \nu_{ei} \omega \tau_e, \\ \gamma_1 &= 0,3 \tau_e \nu_{e0}, & \gamma_1' &= 1 - 0,9 \tau_e \nu_{ei}, \\ \gamma_2 &= 0,3 k_e \nu_{e0}, & \gamma_2' &= 1 - 0,9 k_e \nu_{ei}, \\ \gamma_3 &= -0,3 k_e \nu_{e0} \omega \tau_e, & \gamma_3' &= 0,9 k_e \nu_{ei} \omega \tau_e, \\ k_e &= \frac{\tau_e}{1+(\omega\tau_e)^2}, \\ \alpha_1'' &= \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} \tau_e, & \gamma_1'' &= -3 \alpha_1'', \\ \alpha_2'' &= \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} k_e, & \gamma_2'' &= -3 \alpha_2'', \\ \alpha_3'' &= -\frac{1}{2} \frac{k}{m_e} k_e \omega \tau_e, & \gamma_3'' &= -3 \alpha_3''. \end{aligned}$$

Führt man ein Zylinderkoordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  ein, dessen  $z$ -Richtung mit der Richtung des Magnetfeldes  $(\mathbf{B}, \mathbf{h})$  zusammenfällt, so kann man Gl. (6) übersichtlicher schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla p_e + n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) &= -\varrho_e \nu_{e0} \bar{\alpha} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) - \varrho_e \nu_{e0} \bar{\alpha}' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \\ &- \varrho_e \nu_{ei} \bar{\gamma} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) - \varrho_e \nu_{ei} \bar{\gamma}' (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \\ &+ \varrho_e \nu_{e0} \bar{\alpha}'' \nabla T + \varrho_e \nu_{ei} \bar{\gamma}'' \nabla T, \end{aligned} \quad (6a)$$

wobei  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}'$ ,  $\bar{\alpha}''$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma}'$ ,  $\bar{\gamma}''$  Tensoren sind.

Beispielsweise lautet die Matrix von  $\bar{\alpha}$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Schreibweise zeigt, daß die Reibungskräfte zwischen den verschiedenen Teilchenströmen und die Thermokräfte im magnetisierten Plasma schief zu den entsprechenden Relativgeschwindigkeiten bzw. zum Temperaturgradienten stehen.

Für die Ionen und Neutralteilchen ergeben sich Gleichungen analog zu (6) bzw. (6a), die hier aber nicht wiedergegeben werden, da es für die weitere Rechnung günstiger ist, die Relativgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i$  durch die Schwerpunktschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Plasmas, durch die Schwerpunktschwindigkeit  $\mathbf{v}_L$  der Ladungsträger und durch die Stromdichte  $\mathbf{j}$  auszudrücken.

Aus

$$\varrho_L \mathbf{v}_L = n_e m_e \mathbf{v}_e + n_i m_i \mathbf{v}_i,$$

$$\varrho \mathbf{v} = \varrho_L \mathbf{v}_L + n_0 m_0 \mathbf{v}_0,$$

$$n_L = n_e = n_i = n,$$

$$\mathbf{j} = n e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$$

folgen die Gleichungen:

$$\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_e = \frac{n+n_0}{n_0} (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) - \frac{m_i}{m_0} \frac{\mathbf{j}}{n e}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0 = \frac{n+n_0}{n_0} (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) + \frac{m_e}{m_0} \frac{\mathbf{j}}{n e}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{j}}{e n}. \quad (7c)$$

Berücksichtigt man noch  $m_e/m_0 \approx m_e/m_i \ll 1$ , so erhält man die Impulsbilanzen der Ionen und Elektronen in der Form

$$\begin{aligned} \nabla p_i - n e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) &= g_1 (\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\parallel} + g_2 (\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\perp} + g_3 (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) \times \mathbf{h} \\ &+ l_1 \mathbf{j}_{\parallel} + l_2 \mathbf{j}_{\perp} + l_3 \mathbf{j} \times \mathbf{h} + k_1 \nabla_{\parallel} T + k_2 \nabla_{\perp} T \\ &+ k_3 \nabla T \times \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla p_e + n e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \\ = d_1(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\parallel} + d_2(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\perp} + d_3(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) \times \mathbf{h} \\ + f_1 \mathbf{j}_{\parallel} + f_2 \mathbf{j}_{\perp} + f_3 \mathbf{j} \times \mathbf{h} + e_1 \nabla_{\parallel} T + e_2 \nabla_{\perp} T \\ + e_3 \nabla T \times \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Koeffizienten  $d_{\alpha}$ ,  $e_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha}$ ,  $k_{\alpha}$ ,  $l_{\alpha}$  sind am Ende der Arbeit zusammengefaßt. Addition der Gln. (8) und (9) ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} \nabla p_L - \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \\ = a_1(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\parallel} + a_2(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_{\perp} + a_3(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) \times \mathbf{h} \\ + b_1 \mathbf{j}_{\parallel} + b_2 \mathbf{j}_{\perp} + b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{h} + c_1 \nabla_{\parallel} T + c_2 \nabla_{\perp} T \\ + c_3 \nabla T \times \mathbf{h} \end{aligned} \quad (10)$$

mit

$$\begin{aligned} p_L = p_e + p_i = 2 p_e, \\ a_{\alpha} = d_{\alpha} + g_{\alpha}, \quad b_{\alpha} = f_{\alpha} + l_{\alpha}, \quad c_{\alpha} = e_{\alpha} + k_{\alpha}, \\ \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

## 2.2. Aufstellung der Differentialgleichung für den Druckverlauf $p(T)$ in einer zylindersymmetrischen Plasmasäule

Für die besonders einfache Geometrie einer zylindersymmetrischen Plasmasäule ( $\partial/\partial z = 0$ ,  $\partial/\partial \varphi = 0$ ) läßt sich mit den vorliegenden Gleichungen allgemein der Druckverlauf  $p(T)$  berechnen, wenn man noch das Magnetfeld eines eventuell in  $z$ -Richtung (Richtung des angelegten, homogenen Magnetfeldes) fließenden Stromes gegen das äußere Feld vernachlässigen kann. Wegen der Zylindersymmetrie verschwinden die axialen und azimutalen Komponenten von  $\nabla p$  und  $\nabla T$  und die radiale Komponente von  $\mathbf{v}$ . In dem Zylinderkoordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  besitzen die vorkommenden Vektoren die Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0, 0, B), \quad \nabla p(\partial p/\partial r, 0, 0), \quad \nabla T(\partial T/\partial r, 0, 0), \\ \mathbf{v}(0, v_{\varphi}, v_z), \quad \mathbf{v}_L(v_{Lr}, v_{L\varphi}, v_{Lz}), \\ \mathbf{E}(E_r, 0, E_z), \quad \mathbf{j}(0, j_{\varphi}, j_z) \\ [\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow E_{\varphi} = 0], \quad [\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \Rightarrow j_r = 0]. \end{aligned}$$

Mit den  $r$ -Komponenten der Gln. (3), (10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = j_{\varphi} B, \\ \frac{\partial p_L}{\partial r} - j_{\varphi} B = a_2 v_{Lr} + a_3(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) + b_3 j_{\varphi} + c_2 \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned}$$

und

$$p = p_0 + p_L$$

ergibt sich:

$$-\frac{\partial p_0}{\partial r} = a_2 v_{Lr} + a_3(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) + b_3 j_{\varphi} + c_2 \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (11)$$

Für die benötigten Geschwindigkeitskomponenten  $v_{Lr}$  und  $v_{L\varphi}$  ergeben die  $\varphi$ -Komponenten der Gln. (8) und (9) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} -n e B v_{Lr} = d_2(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) - d_3 v_{Lr} + f_2 j_{\varphi} - e_3 \frac{\partial T}{\partial r}, \\ n e B v_{Lr} = g_2(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) - g_3 v_{Lr} + l_2 j_{\varphi} - k_3 \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} d_2(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) - d_3' v_{Lr} + f_2 j_{\varphi} - e_3 \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \\ g_2(v_{L\varphi} - v_{\varphi}) - g_3' v_{Lr} + l_2 j_{\varphi} - k_3 \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

mit  $d_3' = d_3 - n e B$  und  $g_3' = g_3 + n e B$ .

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$v_{Lr} = \frac{(l_2 d_2 - f_2 g_2) j_{\varphi} + (e_3 g_2 - k_3 d_2) \cdot \partial T / \partial r}{d_2 g_3' - d_3' g_2} \quad (12 a)$$

und  $v_{L\varphi} - v_{\varphi}$

$$= \frac{(l_2 d_3' - f_2 g_3') j_{\varphi} + (e_3 g_3' - k_3 d_3') \cdot \partial T / \partial r}{d_2 g_3' - d_3' g_2} \quad (12 b)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Gl. (11) ein, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} + D j_{\varphi} + F \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned} D = b_3 + \frac{a_2(l_2 d_2 - f_2 g_2) + a_3(l_2 d_3' - f_2 g_3')}{g_3' d_2 - d_3' g_2}, \\ F = c_2 - \frac{a_2(k_3 d_2 - e_3 g_2) + a_3(k_3 d_3' - e_3 g_3')}{g_3' d_2 - d_3' g_2}. \end{aligned}$$

## 2.3. Berechnung des Druckverlaufs $p(T)$ bei Gültigkeit der Saha-Gleichung

Setzt man in Gl. (13)

$$j_{\varphi} = \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r}$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{D}{B} \frac{\partial p}{\partial r} + F \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

Aus Gl. (14) kann man  $p(T)$  bestimmen, wenn man  $p_0$  und  $B$  als Funktionen von  $p$  und  $T$  kennt.

Aus der Saha-Gleichung

$$\frac{p_i^2}{p_0} = S(T) = \frac{(2 \pi m_e)^{3/2} (k T)^{5/2}}{h^3} \frac{2 Z_i}{Z_0} \exp\left(-\frac{E_i}{k T}\right) \quad (15)$$

und

$$p = p_0 + 2 p_i$$

folgt:

$$p_0 = p + 2 S - 2 \sqrt{p S + S^2} = p_0(p, T), \quad (16 a)$$

$$p_i = \sqrt{p S + S^2} - S = p_i(p, T). \quad (16 b)$$



Daraus erhält man durch Differentiation:

$$\begin{aligned}\nabla p_0 &= \left( \frac{\partial p_0}{\partial p} \right)_T \nabla p + \left( \frac{\partial p_0}{\partial T} \right)_p \nabla T \\ &= \frac{p_0}{p_0 + p_i} \nabla p - \frac{p_0^2}{p_i(p_0 + p_i)} \frac{\partial S}{\partial T} \nabla T.\end{aligned}\quad (17)$$

Die  $j\varphi$ -Ströme schwächen das äußere Magnetfeld  $B_0$ . Der dadurch verursachte Abfall von  $B$  zur Achse hin sorgt gerade für das Gleichgewicht mit dem nach innen ansteigenden Druck. Aus Gl. (10) und

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (18)$$

folgt

$$\nabla p = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \left( \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}. \quad (19)$$

Da der letzte Term der Gl. (19) bei der gegebenen Geometrie verschwindet, kann man die verbleibende Gleichung leicht integrieren und erhält:

$$B(p)^2 = B_0^2 + 2 \mu_0 (p_A - p), \quad (20)$$

$B_0$  bedeutet dabei die äußere magnetische Induktion,  $p_A$  den Gasdruck außerhalb der leitfähigen Zone.

Da  $T$  eine umkehrbar eindeutige Funktion des Radius  $r$  ist, kann man schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dT} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (21)$$

Unter Verwendung der Gln. (13), (17), (20) und (21) erhält man schließlich für  $p(T)$  die Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\frac{p+2S-2\sqrt{pS+S^2}}{\sqrt{pS+S^2}-S} \frac{dS}{dT} - F \frac{p+S-\sqrt{pS+S^2}}{p+2S-2\sqrt{pS+S^2}}}{1 + \frac{p+S-\sqrt{pS+S^2}}{p+2S-2\sqrt{pS+S^2}}} \cdot \frac{D}{\sqrt{B_0^2 + 2 \mu_0 (p_A - p)}} = f(p, T). \quad (22)$$

Als Anfangstemperatur bei der Integration der Gl. (22) wird  $T_A = 6 \cdot 10^3$  °K gewählt, bei der praktisch schon alle Wasserstoffmoleküle dissoziiert sind, während die Ionisation noch nicht begonnen hat.

Aus Gl. (22) kann man den Druckverlauf bis auf die Integrationskonstante für den Grenzfall vollständiger Ionisation ( $p_0/p \rightarrow 0$ ) und starker Wirkung des Magnetfeldes ( $\omega \tau_e \gg 1$ ) bestimmen:

$$\frac{dp}{p} = \frac{3}{4} \frac{dT}{T} \Rightarrow p \sim T^{3/4}. \quad (23)$$

Zum gleichen Ergebnis führt die Berücksichtigung der z. B. von BRAGINSKY<sup>10</sup> angegebenen Thermokraft in den Impulsbilanzen der Ionen und Elektronen.

Bei der numerischen Integration der Gl. (22) werden folgende Zahlenwerte verwendet:

$$\begin{aligned}Q_{00} &= 8,6 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \\ Q_{i0} &= 46 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \\ Q_{e0} &= 16 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \\ E_i &= 13,54 \text{ eV}.\end{aligned}$$

Da der Stoßquerschnitt  $Q_{00}$  nur im Bereich schwacher Ionisation eine Rolle spielt, wird der von VANDERSLICE, WEISSMAN, MASON und FALLON<sup>11</sup> berechnete Zahlenwert bei  $T = 7000$  °K verwendet.

Der Umladungsquerschnitt  $Q_{i0}$  beherrscht den Transport von Ionisationsenergie. Der verwendete

Zahlenwert ( $T = 13\,000$  °K) von DEVOTO<sup>8</sup> basiert auf Rechnungen von DALGARNO<sup>9</sup> und stimmt innerhalb von 17% mit dem von GRIER<sup>7</sup> angegebenen Wert überein.

Für  $Q_{e0}$  wurde der von DEVOTO<sup>8</sup> für  $T = 13\,000$  °K angegebene Zahlenwert verwendet. Dieser theoretische Wert wird annähernd durch Messungen von KÜHN und MOTSCHMANN<sup>12</sup> und von BEHRINGER, KOLLMAR und MENDEL<sup>13</sup> bestätigt.

Die Annahme konstanter Werte für  $Q_{00}$  und  $Q_{e0}$  beeinträchtigt die Genauigkeit der Ergebnisse kaum. Die numerischen Resultate sind sehr unempfindlich gegenüber Änderungen der Zahlenwerte für  $Q_{00}$  und  $Q_{e0}$ . Die Gründe für dieses Verhalten sind:

a) Der Temperaturbereich oberhalb von  $6000$  °K, in dem  $Q_{00}$  eine Rolle spielt, ist nur schmal, da die Ionisation beginnt.

b) Der Transport von Ionisationsenergie wird von  $Q_{i0}$  beherrscht, während  $Q_{e0}$  praktisch keine Rolle spielt.

c) Die Stoßfrequenz der Elektronen wird auch im Bereich teilweiser Ionisation hauptsächlich durch den großen Coulomb-Querschnitt bestimmt.

Parameter bei der Integration sind die äußere magnetische Induktion  $B_0$  und der Außendruck  $p_A$ .

In den Abb. 1–3 sind die Druckverläufe über der Temperatur für verschiedene  $B_0$  mit  $p_A$  als Para-

<sup>10</sup> S. I. BRAGINSKY, Soviet Phys.-JETP **6**, 358 [1958].

<sup>11</sup> J. T. VANDERSLICE, S. WEISSMAN, E. A. MASON u. R. J. FALLON, Phys. Fluids **5**, 155 [1962].

<sup>12</sup> V. KÜHN u. H. MOTSCHMANN, Z. Naturforsch. **19 a**, 5 [1964].

<sup>13</sup> K. BEHRINGER, W. KOLLMAR u. J. MENDEL, wird veröffentlicht.

meter aufgetragen. Je höher der Außendruck ist, um so geringer wird die bei gleichem Außenmagnetfeld und gleicher Temperatur erreichte relative

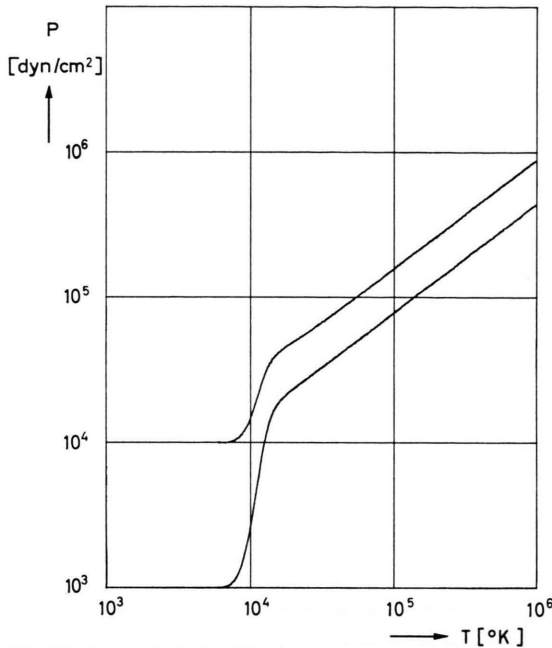


Abb. 1. Druckverlauf  $p(T)$  für  $p_A = 10^3$  und  $10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 10$  kG [ $p(T)$  für  $p_A = 10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> wurde nicht berechnet, da  $\omega \tau_e$  im Ionisationsbereich zu klein ist].

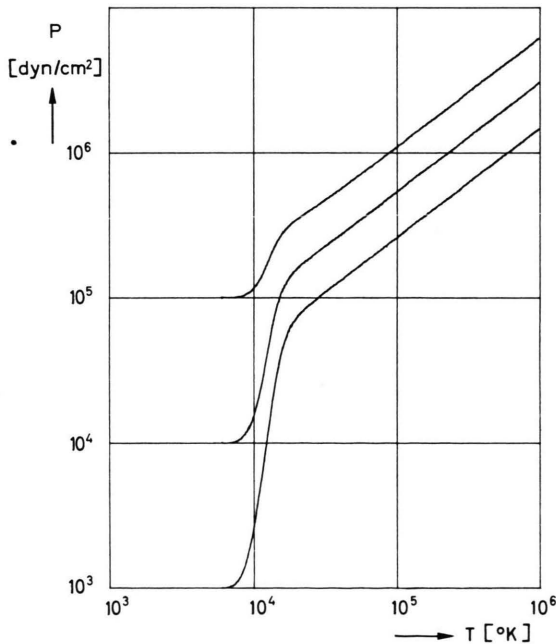


Abb. 2. Druckverlauf  $p(T)$  für  $p_A = 10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 50$  kG.

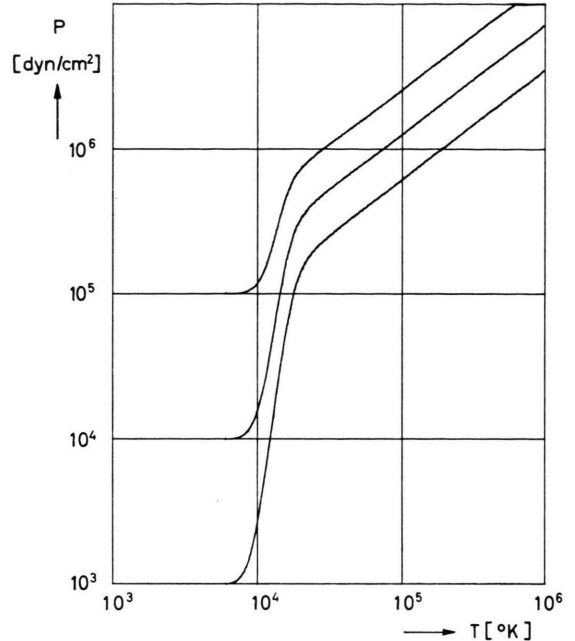


Abb. 3. Druckverlauf  $p(T)$  für  $p_A = 10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 150$  kG.

Druckerhöhung. Die Ursache hierfür ist die Abnahme der mittleren freien Weglänge mit steigendem Druck, die den Einfluß des Magnetfeldes verringert.

Die Erweiterung der Rechnungen von WIENECKE<sup>1</sup> um den Einfluß des Nernst-Effektes führt zu einem weiteren Anstieg des Druckes auch bei vollständiger Ionisation. Um den Einfluß der Thermoeffusionseffekte auf den Druckaufbau im teilweise ionisierten Wasserstoffplasma zu untersuchen, wurde die Gl. (22) unter Verwendung der von WIENECKE benutzten Zahlenwerte für  $Q_{e0}$  und  $Q_{i0}$  integriert. Zum Vergleich sind die Druckverläufe nach dieser Rechnung und die Ergebnisse von WIENECKE für  $B_0 = 10$  kG und 50 kG bei  $p_A = 5 \cdot 10^3$  dyn/cm<sup>2</sup> in Abb. 4 aufgetragen. Man erkennt, daß die Thermokräfte im Bereich teilweiser Ionisation den Druckaufbau nur wenig beeinflussen.

### 3. Berechnung der Wärmeleitfähigkeit

#### 3.1. Der Wärmestrom senkrecht zum Magnetfeld durch Transport von thermischer Energie

Für den Gesamtstrom thermischer Energie senkrecht zum Magnetfeld erhält man aus den Gln. (1 a),

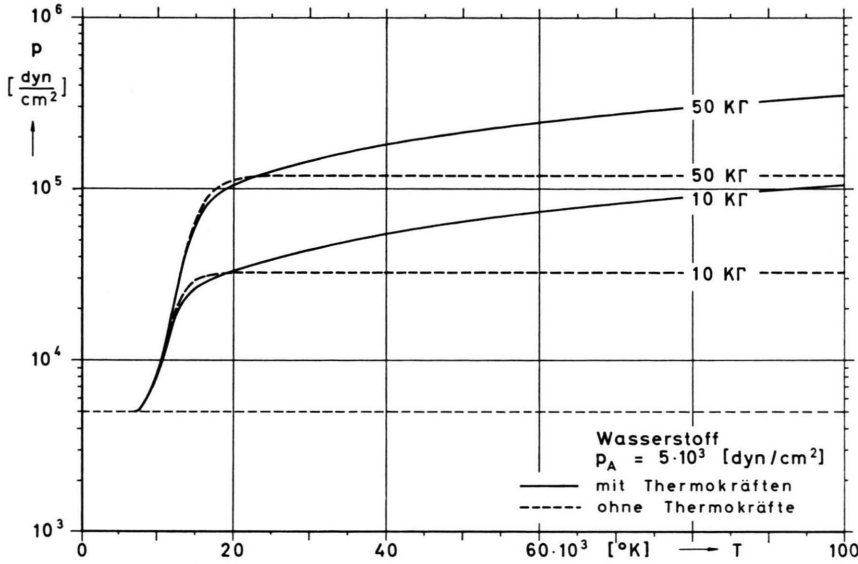


Abb. 4. Druckanstieg im Magnetfeld mit und ohne Berücksichtigung von Thermokräften.

(1 b), (1 c) und (2 a), (2 b), (2 c):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\perp} &= \mathbf{S}_{0\perp} + \mathbf{S}_{i\perp} + \mathbf{S}_{e\perp} \\
 &= - \left[ \frac{5}{2} \frac{k p_e}{m_e} k_e + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} k_i \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} k_i \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} + \frac{5}{2} \frac{k p_0}{m_0} \tau_0 \right] \nabla \perp T \\
 &\quad - \left[ - \frac{5}{2} \frac{k p_e}{m_e} k_e \omega \tau_e + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} k_i \Omega \tau_i \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} k_i \Omega \tau_i \right] \nabla T \times \mathbf{h} \quad (24) \\
 &\quad + \frac{3}{2} p_e \nu_{ei} k_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_{\perp} + \frac{3}{2} p_e \nu_{ei} k_e \omega \tau_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{h} \\
 &\quad - \frac{1}{2} p_e \nu_{e0} k_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0)_{\perp} + \frac{1}{2} p_e \nu_{e0} k_e \omega \tau_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{h} \\
 &\quad - \frac{1}{2} p_e \left[ k_i \nu_{i0} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) - \nu_{i0} \tau_0 \right] (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0)_{\perp} \\
 &\quad - \frac{1}{2} p_e k_i \nu_{i0} \Omega \tau_i \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0) \times \mathbf{h}.
 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite von Gl. (24) stellen den nur durch die thermische Teilchenbewegung verursachten Wärmestrom dar (Kontaktwärmeleitung). Für den zweiten, durch das Magnetfeld verursachten Term ( $\sim \nabla T \times \mathbf{h}$ ) kann man für ein vollionisiertes Plasma aus einer Ionenart und Elektronen eine einfache physikalische Interpretation geben.

Durch ein Flächenelement in der Ebene  $\mathbf{B}$ ,  $\nabla T$  (Abb. 5) fliegen im Mittel von unten nach oben schnellere Teilchen als in umgekehrter Richtung, da sie aus einem Bereich größerer Temperatur kommen. Wenn die beiden Teilchenströme ( $\sim n \cdot \mathbf{v}$ ) sich gegenseitig kompensieren, so können sich die bei-

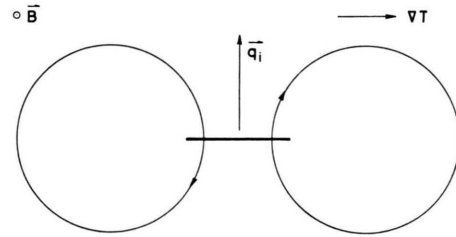


Abb. 5. Zur Interpretation des Wärmestromes proportional zu  $\nabla T \times \mathbf{B}$ .

den Energieströme, von der Ordnung  $n \cdot T \cdot \mathbf{v}$ , nicht völlig aufheben, sondern es bleibt ein Wärmestrom  $\mathbf{q}$  proportional zu  $\nabla T$  übrig. Diese Ströme haben für Ionen und Elektronen verschiedene Vorzeichen und fließen senkrecht zu  $\nabla T$  und  $\mathbf{B}$ . Da sie parallel zu den Isothermen fließen, tragen sie nicht direkt zur Kühlung des Plasmas und zur Entropieerzeugung bei<sup>14</sup>.

Die restlichen Anteile von  $\mathbf{S}_{\perp}$  werden durch die Diffusion der verschiedenen Teilchensorten gegeneinander, d. h. durch deren verschiedene Schwerpunktschwindigkeiten, verursacht. Da für das hier betrachtete Plasma  $v_{ir} = v_{er}$  ist, verschwinden im Wärmestrom die zu  $(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)_r$  proportionalen Terme. Die restlichen, sich nicht kompensierenden Teilchenströme transportieren thermische Energie und tragen damit zum gesamten Wärmestrom bei.

<sup>14</sup> S. I. BRAGINSKY, in: M. A. LEONTOVICH, Reviews of Plasma Physics, Consultants Bureau, New York 1967, Band 1.

Ersetzt man in Gl. (24) die Relativgeschwindigkeiten  $\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  durch  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_L$  und  $\mathbf{j}$ , so erhält man:

$$\mathbf{S}_\perp = -\kappa_{K\perp} \nabla_\perp T - \kappa_{KH} \nabla T \times \mathbf{h} - R_1 (\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_\perp - R_2 (\mathbf{v}_L - \mathbf{v}) \times \mathbf{h} - R_3 \mathbf{j}_\perp - R_4 \mathbf{j} \times \mathbf{h} \quad (25)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa_{K\perp} &= \kappa_{OK\perp} + \kappa_{iK\perp} + \kappa_{eK\perp} \\ &= \left[ \frac{5}{2} \frac{k p_0}{m_0} \tau_0 + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) k_i \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right] + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) k_i + \frac{5}{2} \frac{k p_e}{m_e} k_e, \\ \kappa_{KH} &= \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} k_i \Omega \tau_i + \frac{5}{2} \frac{k p_i}{m_i} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) k_i \Omega \tau_i - \frac{5}{2} \frac{k p_e}{m_e} k_e \Omega \tau_e, \\ R_1 &= \frac{1}{2} p_e \frac{p_i + p_0}{p_0} \left[ k_e \nu_{e0} + k_i \nu_{i0} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}} \right) - \nu_{i0} \tau_0 \right], \\ R_2 &= \frac{1}{2} p_e \frac{p_i + p_0}{p_0} \left[ -k_e \nu_{e0} \omega \tau_e + k_i \nu_{i0} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}} \right) \Omega \tau_i \right], \\ R_3 &= \frac{1}{2} p_e \frac{1}{n e} \left[ k_e \nu_{e0} \left( \frac{3 \nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1 \right) + k_i \nu_{i0} \frac{m_e}{m_0} \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}} \right) - \nu_{i0} \tau_0 \frac{m_e}{m_0} \right], \\ R_4 &= -\frac{1}{2} p_e \frac{1}{n e} \left[ k_e \nu_{e0} \omega \tau_e \left( \frac{3 \nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1 \right) - k_i \nu_{i0} \Omega \tau_i \left( 1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}} \right) \left( 1 - \frac{\tau_0}{\tau_{oi}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Für vernachlässigbaren Ionisationsgrad ( $p_i \approx 0$ ) ist  $\kappa_{OK}$  die Wärmeleitfähigkeit der Wasserstoffatome für das Stoßmodell harter, elastischer Kugeln, da der Wirkungsquerschnitt  $Q_{00}$  konstant gesetzt wurde (l. c.<sup>15</sup>).

Für die in Gl. (25) vorkommende Diffusionsgeschwindigkeit der Ladungsträger  $(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_\perp$  findet man mit der Umformung

$$\nabla p_L = p \left[ \nabla \left( \frac{p_L}{p} \right) + \frac{p_L}{p} \nabla \ln p \right]$$

aus Gl. (10):

$$(\mathbf{v}_L - \mathbf{v})_\perp = D_\perp \mathbf{d}_\perp^D - D_H \mathbf{d}^D \times \mathbf{h} - D_\perp^T \mathbf{d}_\perp^T + D_H^T \mathbf{d}^T \times \mathbf{h}. \quad (26)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} D_\perp &= \frac{p a_2}{a_2^2 + a_3^2}, & D_H &= \frac{p a_3}{a_2^2 + a_3^2}, \\ D_\perp^T &= \frac{c_2 a_2 T}{a_2^2 + a_3^2}, & D_H^T &= \frac{c_2 a_3 T}{a_2^2 + a_3^2}, \end{aligned} \quad (27 a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^D &= \nabla \left( \frac{p_L}{p} \right) + \frac{p_L}{p} \nabla \ln p - \frac{1}{p} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ &\quad - \frac{b_2}{p} \mathbf{j}_\perp - \frac{b_3}{p} \mathbf{j} \times \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (27 b)$$

$$\mathbf{d}^T = \nabla \ln T + \frac{c_3}{c_2} (\nabla \ln T) \times \mathbf{h}. \quad (27 c)$$

Die ersten drei Summanden in Gl. (27 b) geben die Wirkung des Gradienten der Konzentration, des Gradienten des Gesamtdruckes und der äußeren Kräfte auf die Diffusion des Schwerpunktes der Ladungs-

träger an. Da die Gruppe der Ladungsträger selbst wieder aus gegeneinander diffundierenden Ionen und Elektronen besteht, treten in Gl. (27 b) dazu noch die beiden zu  $\mathbf{j}_\perp$  und  $\mathbf{j} \times \mathbf{h}$  proportionalen Terme auf.

Die zu  $D_\perp$  und  $D_H$  proportionalen Terme in Gl. (26) stellen die normale Diffusion und die Terme proportional zu  $D^T$  und  $D_H^T$  die Thermodiffusion dar. Entsprechend diesem Ergebnis und der Gl. (25) kann man den Wärmestrom  $\mathbf{S}_\perp$  aus drei Anteilen zusammensetzen:

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_{\perp K} + \mathbf{S}_{\perp D} + \mathbf{S}_{\perp TD}; \quad (28)$$

$\mathbf{S}_{\perp K}$  ist der Wärmestrom durch Kontaktwärmeleitung,

$\mathbf{S}_{\perp D}$  ist der Wärmestrom durch normale Diffusion,

$\mathbf{S}_{\perp TD}$  ist der Wärmestrom durch Thermodiffusion. Da im folgenden nur noch die  $r$ -Komponenten der Wärmeströme behandelt werden, wird der Index „ $r$ “ nicht mehr geschrieben.

Für  $S_K$  erhält man aus Gl. (25):

$$S_K = -\kappa_{K\perp} \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa_K \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (29)$$

Für  $S_D$  ergibt sich aus den Gln. (25), (26), (27 a) und (27 b):

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{R_1}{a_2^2 + a_3^2} \left[ a_2 \frac{\partial p_0}{\partial r} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) j_\varphi \right] \\ &\quad + \frac{R_2}{a_2^2 + a_3^2} \left[ a_3 \frac{\partial p_0}{\partial r} + (a_2 b_2 + a_3 b_3) j_\varphi \right] - R_4 j_\varphi. \end{aligned}$$

<sup>15</sup> S. CHAPMAN U. T. G. COWLING, The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, Cambridge University Press 1960.

Mit den Gln. (3), (17) und (21) kann man dieses Ergebnis umformen:

$$S_D = -\kappa_D \frac{\partial T}{\partial r} \quad (30)$$

mit

$$\kappa_D = \frac{p_0^2}{p_i(p_0+p_i)} \frac{R_1 a_2 + R_2 a_3}{a_2^2 + a_3^2} \frac{dS}{dT} + \left[ \frac{R_1}{B} \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{R_2}{B} \frac{a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{R_4}{B} - \frac{p_0}{p_0+p_i} \frac{a_2 R_1 + a_3 R_2}{a_2^2 + a_3^2} \right] \frac{dp}{dT} \quad (31)$$

$S_{TD}$  läßt sich mit Hilfe der Gln. (25), (26) und (27 c) ebenfalls in der für Wärmeströme gewohnten Form schreiben:

$$S_{TD} = -\kappa_{TD} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (32)$$

mit

$$\kappa_{TD} = -R_1 \frac{a_2 c_2 + a_3 c_3}{a_2^2 + a_3^2} - R_2 \frac{a_3 c_2 - a_2 c_3}{a_2^2 + a_3^2} \quad (33)$$

Es ergibt sich also, daß der gesamte radiale Wärmestrom proportional zu  $\partial T / \partial r$  geschrieben werden kann:

$$S = -(\kappa_K + \kappa_D + \kappa_{TD}) \cdot \partial T / \partial r \quad (34)$$

### 3.2. Der Energiestrom senkrecht zum Magnetfeld durch Transport von Enthalpie

Zu dem aus den Momentengleichungen berechneten Strom thermischer Energie tritt im Ionisationsbereich ein weiterer Anteil. Wegen der Aufnahme der Ionisierungsenergie und der Vergrößerung der Teilchenzahl tragen die nach außen diffundierenden Ladungsträger einen größeren Enthalpiestrom als die nach innen diffundierenden Atome. Für das zylindersymmetrische Plasma ist auch dieser Energiestrom proportional zu  $\partial T / \partial r$ :

$$W_R = -\kappa_R \cdot \partial T / \partial r \quad (35)$$

Die von WIENECKE<sup>16</sup> durchgeführte Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit  $\kappa_R$  soll nun noch durch die Berücksichtigung der Thermokräfte in den Momentengleichungen ergänzt werden. Diese üben einen direkten Einfluß durch die Modifizierung der Diffusionsströme aus. Dazu kommt noch ihre indirekte Auswirkung auf den Ionisationsgrad und die freien Weglängen durch die Änderung des Druckverlaufes  $p(T)$ .

Die Enthalpien pro Masseneinheit sind:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{5}{2} k T / m_0 + D_m / 2 m_0, \\ h_i &= \frac{5}{2} k T / m_i + E_i / m_i + D_m / 2 m_0, \\ h_e &= \frac{5}{2} k T / m_e. \end{aligned} \quad (36)$$

$D_m$  = Dissoziationsenergie des Moleküls,

$E_i$  = Ionisierungsenergie des Atoms.

Mit den Bedingungen der Quasineutralität, der Stromlosigkeit in  $r$ -Richtung und  $m_i \approx m_0$  erhält man die radiale Enthalpiestromdichte:

$$W_R = n e \left( \frac{5}{2} k T + E_i \right) (v_L - v)_r = -\kappa_R \cdot \partial T / \partial r \quad (37)$$

Mit den Gln. (17), (21), (26), (27 a), (27 b) und (27 c) kann man die Gl. (37) in die gewünschte Form nach Gl. (35) bringen und erhält:

$$\begin{aligned} \kappa_R &= p_e \left( \frac{5}{2} + \frac{E_i}{k T} \right) \left[ \frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} \frac{p_0^2}{p_i(p_0+p_i)} \frac{dS}{dT} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{B} \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_2 c_2 + a_3 c_3}{a_2^2 + a_3^2} - \frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} \frac{p_0}{p_0+p_i} \right) \frac{dp}{dT} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

### 3.3. Die gesamte Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff

Der gesamte Energiestrom  $W$  in radialer Richtung beträgt:

$$\begin{aligned} W &= S + W_R = \\ &= -(\kappa_K + \kappa_D + \kappa_{TD} + \kappa_R) \frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned} \quad (39)$$

Beim Übergang zur praktisch vollständigen Ionisation verschwinden die Wärmeleitungskoeffizienten  $\kappa_{OK}$ ,  $\kappa_{TD}$  und  $\kappa_R$ . Für Temperaturen oberhalb von  $2 \cdot 10^4$  °K gehen  $\kappa_{OK}$  und  $\kappa_{TD}$  wie  $p_0 \tau_0$  gegen Null, wobei  $\kappa_{OK}$  immer etwa um eine Zehnerpotenz größer ist als  $\kappa_{TD}$ .

Wenn die Temperatur so hoch ist, daß  $\omega \tau_e$  und  $\Omega \tau_i$  groß gegen 1 sind, dann dominiert die Kontaktwärmeleitfähigkeit der Ionen über die der Elektronen, da diese wegen ihrer größeren Gyrofrequenz stärker durch das Magnetfeld gebremst werden. Für  $\kappa_{iK}$  und  $\kappa_{eK}$  erhält man folgende asymptotische Verläufe ( $\Omega \tau_i, \omega \tau_e \gg 1$ ):

$$\begin{aligned} \kappa_{iK} &\rightarrow \frac{5}{2} \frac{p_i k}{m_i} \frac{1}{\Omega^2 \tau_i} \sim \frac{1}{\Omega} \frac{\ln A}{T}, \\ \kappa_{eK} &\rightarrow \frac{5}{2} \frac{p_e k}{m_e} \frac{1}{\omega^2 \tau_e} = \frac{m_i \tau_i \Omega^2}{m_e \tau_e \omega^2} \kappa_{iK} = \frac{1}{13} \kappa_{iK}. \end{aligned} \quad (40)$$

Für  $\omega \tau_e \gg 1$  kann man auch für  $\kappa_D$  einen einfachen asymptotischen Verlauf angeben. Man erhält aus den Gln. (23) und (31):

$$\kappa_D = -1,2 \frac{p_e k}{m_e} \frac{1}{\omega^2 \tau_e} = -0,48 \kappa_{eK}. \quad (41)$$

Bemerkenswert an Gl. (41) ist das negative Vorzeichen von  $\kappa_D$ , welches ausdrückt, daß die Wechselwirkung der azimuthalen Ströme mit dem axialen

<sup>16</sup> R. WIENECKE, Z. Naturforsch. **19a**, 675 [1964].



Magnetfeld einen Transport von Wärme in Richtung des Temperaturgradienten, d. h. in das Plasma hinein verursacht. Diese Verminderung der gesamten Wärmeleitfähigkeit spielt allerdings nur eine geringe Rolle, da  $\kappa_D$  nur von Größenordnung des  $\kappa_{eK}$ , also klein gegen  $\kappa_{iK}$ , ist.

Aus Gl. (40) erkennt man, daß  $\kappa$  bei hohen Temperaturen schwächer als mit  $1/T$  abfällt, da  $\ln A$  langsam mit  $T$  zunimmt.

In den Abb. 6, 7 und 8 sind die, unter Verwendung der nach Abschnitt 2.3. bestimmten Druckverläufe, berechneten Wärmeleitfähigkeiten für verschiedene magnetische Induktionen  $B$  und Außen drucke  $p_A$  aufgetragen. Bei den Rechnungen wurden die schon in Abschnitt 2.3. angegebenen Werte für  $Q_{00}$ ,  $Q_{i0}$ ,  $Q_{e0}$  und  $E_i$  verwendet.

Bei Temperaturen von einigen  $10^4$  bis  $10^5$  °K durchläuft die Wärmeleitfähigkeit ein Maximum. Die Ursache dafür ist der geringe Einfluß des Magnetfeldes auf die Bewegung der Ionen für  $(\Omega \tau_i)^2 < 1$  und die starke Bremsung für große  $\Omega \tau_i$ . Jenseits des Maximums mündet die Kurve für  $\kappa$  allmählich in den asymptotischen Verlauf proportional zu  $\ln A/T$  nach Gl. (40) ein.

In Abb. 9 sind die verschiedenen Anteile von  $\kappa$  für  $p_A = 5 \cdot 10^3$  dyn/cm<sup>2</sup> und  $B_0 = 50$  kG aufge-

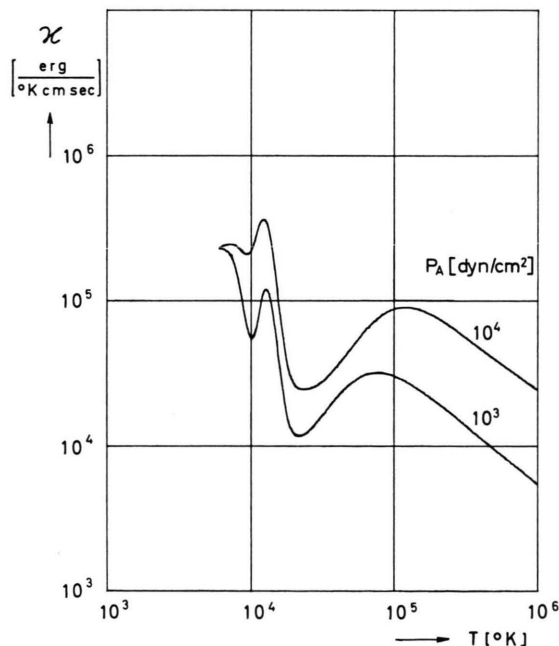


Abb. 6. Wärmeleitfähigkeit  $\kappa(T)$  für  $p_A = 10^3$  und  $10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 10$  kG [ $\kappa(T)$  für  $p_A = 10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> wurde nicht berechnet, da  $\omega \tau_e$  im Ionisationsbereich zu klein ist].

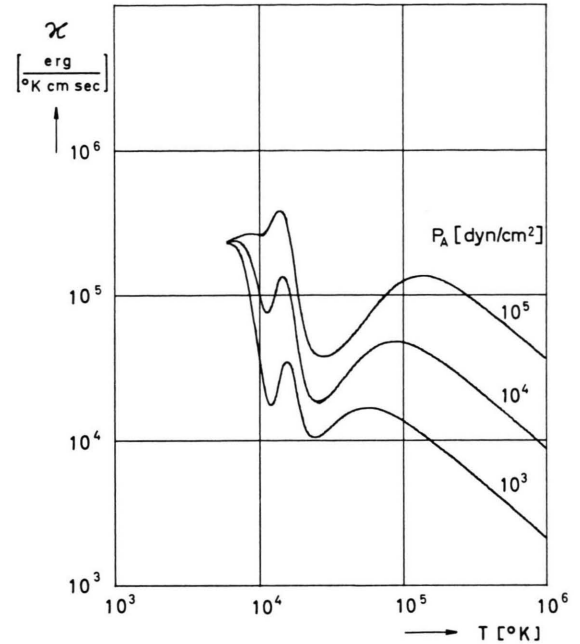


Abb. 7. Wärmeleitfähigkeit  $\kappa(T)$  für  $p_A = 10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 50$  kG.

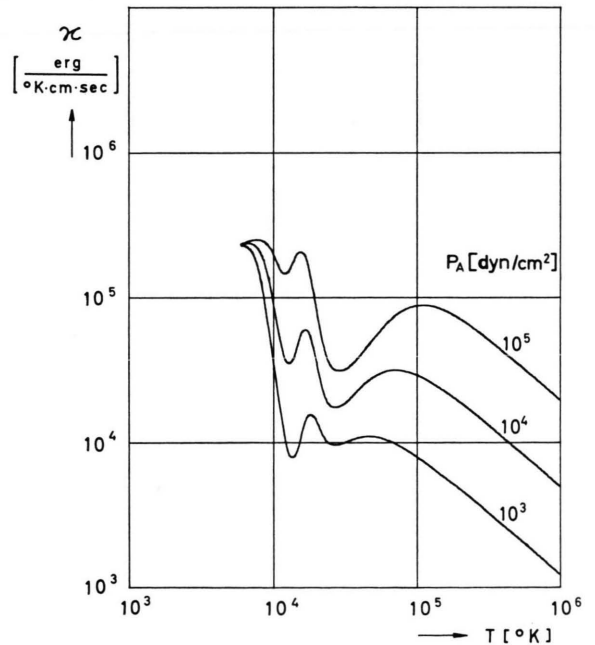


Abb. 8. Wärmeleitfähigkeit  $\kappa(T)$  für  $p_A = 10^3$ ,  $10^4$  und  $10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> bei  $B_0 = 150$  kG.

zeichnet. Man erkennt den dominierenden Einfluß von  $\kappa_R$  im Ionisationsbereich und das starke Abklingen von  $\kappa_{TD}$  mit wachsender Temperatur. Ein Vergleich von  $\kappa_R$  mit den Resultaten von Wienecke

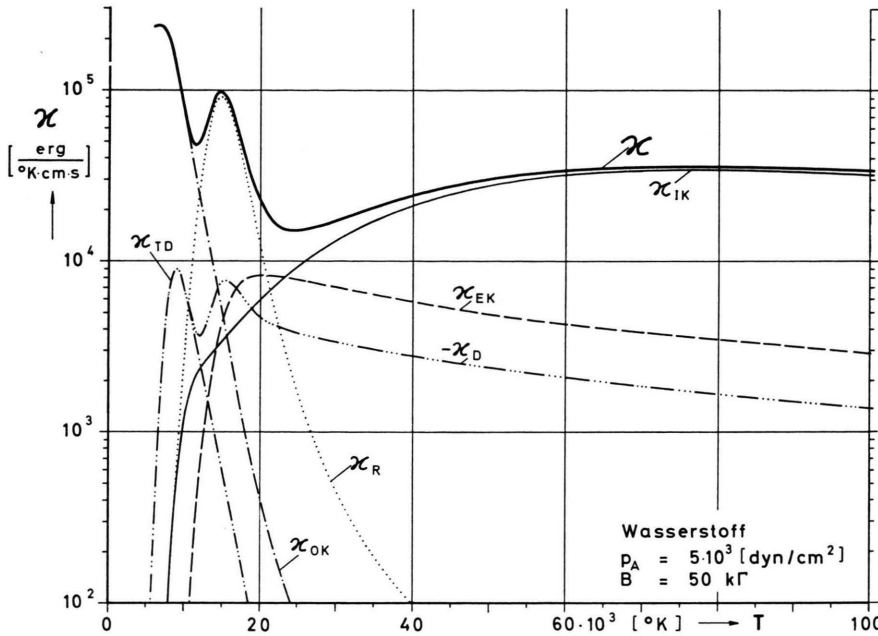


Abb. 9. Die verschiedenen Anteile der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa(T)$  für  $p_A = 5 \cdot 10^3$  dyn/cm<sup>2</sup> und  $B_0 = 50$  kG.

zeigt zwischen den beiden Rechnungen nur geringe Unterschiede, die im wesentlichen durch die Verwendung verschiedener Wirkungsquerschnitte verursacht werden.

#### 4. Zusammenfassung

Man kann den Druckaufbau im Wasserstoffplasma in zwei deutlich voneinander verschiedene Bereiche trennen.

Beim Übergang des neutralen zum ionisierten Wasserstoff steigt der Druck steil mit der Temperatur an, da das axiale Magnetfeld die ambipolare Diffusion stark behindert. Der Einfluß der Thermokräfte ist in diesem Temperaturbereich nur gering (Abb. 5).

An diese Druckstufe schließt sich der wesentlich flachere Verlauf proportional zu  $T^{3/4}$  im vollständig ionisierten Wasserstoff an. Dieser Verlauf wird durch den Nernst-Effekt, d. h. durch die Thermokraft proportional zu  $\nabla T \times \mathbf{B}$ , bestimmt.

Der weitere Druckanstieg im vollionisierten Wasserstoffplasma beeinflusst auch die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zum Magnetfeld, da der steigende Druck der Zunahme von  $\omega \tau_e$  und  $\Omega \tau_i$  entgegenwirkt. Dadurch wird die reduzierende Wirkung eines Magnetfeldes auf die Wärmeleitfähigkeit bei hohen Temperaturen wieder vermindert.

Bei hohen Temperaturen wird der Wärmestrom senkrecht zum Magnetfeld fast vollständig von den Ionen getragen, da die Bewegung der Elektronen wegen ihrer wesentlich höheren Gyrofrequenz stark gehemmt wird.

#### Anhang: Formeln und Bezeichnungen

$$\ln A = \ln \left[ \frac{3 k T}{e^2} \left( \frac{k T}{4 \pi e^2 n} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{el. stat. cgs})$$

$$\nu_{ei} = 4 \sqrt{2} \pi e^4 \ln A n / (3 \sqrt{m_e} (k T)^{3/2}) \quad (\text{el. stat. cgs})$$

$$\nu_{ii} = \sqrt{2} m_e / m_i \nu_{ei},$$

$$\nu_{i0} = (16/3 \sqrt{\pi}) n_0 Q_{i0} (k T / m_i)^{1/2},$$

$$\nu_{e0} = (16/3 \sqrt{2} \pi) n_0 Q_{e0} (k T / m_e)^{1/2},$$

$$\nu_{00} = (8/3 \sqrt{\pi}) n_0 Q_{00} (k T / m_0)^{1/2};$$

$$\frac{1}{\tau_{i0}} = 0,825 \nu_{i0}, \quad \frac{1}{\tau_{e0}} = 1,3 \nu_{e0}, \quad \frac{1}{\tau_{00}} = 0,8 \nu_{00},$$

$$\frac{1}{\tau_{0i}} = 0,825 \nu_{0i}, \quad \frac{1}{\tau_{ei}} = (1,3 + \frac{2}{5} \sqrt{2}) \nu_{ei}, \quad \frac{1}{\tau_{ii}} = 0,4 \nu_{ii},$$

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{ii}} + \frac{1}{\tau_{i0}} - \frac{\tau_0}{\tau_{i0} \tau_{0i}},$$

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{1}{\tau_{0i}} + \frac{1}{\tau_{00}}, \quad \frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{e0}};$$

$$k_e = \frac{\tau_e}{1 + (\omega \tau_e)^2}, \quad k_i = \frac{\tau_i}{1 + (\Omega \tau_i)^2};$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 - 0,1 \tau_e \nu_{e0} & \alpha_1' &= 0,3 \tau_e \nu_{ei}, \\ \alpha_2 &= 1 - 0,1 k_e \nu_{e0}, & \alpha_2' &= 0,3 k_e \nu_{ei}, \\ \alpha_3 &= 0,1 k_e \nu_{e0} \omega \tau_e, & \alpha_3' &= -0,3 k_e \nu_{ei} \omega \tau_e,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1'' &= \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} \tau_e; \\ \alpha_2'' &= \frac{1}{2} \frac{k}{m_e} k_e; \\ \alpha_3'' &= -\frac{1}{2} \frac{k}{m_e} k_e \omega \tau_e;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0,3 \tau_e \nu_{e0}, & \gamma_1' &= 1 - 0,9 \tau_e \nu_{ei}, \\ \gamma_2 &= 0,3 k_e \nu_{e0}, & \gamma_2' &= 1 - 0,9 k_e \nu_{ei}, \\ \gamma_3 &= -0,3 k_e \nu_{e0} \omega \tau_e, & \gamma_3' &= 0,9 k_e \nu_{ei} \omega \tau_e, \\ \gamma_1'' &= -3 \alpha_1''; \\ \gamma_2'' &= -3 \alpha_2''; \\ \gamma_3'' &= -3 \alpha_3'';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 1 - 0,1 \tau_0 \nu_{0i} - 0,1 \nu_{i0} \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right)^2, \\ \beta_2 &= 1 - 0,1 \tau_0 \nu_{0i} - 0,1 \nu_{i0} k_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right)^2, \\ \beta_3 &= -0,1 \nu_{i0} k_i \Omega \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{k}{2 m_i} \left[ \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) \tau_i - \tau_0 \right], \\ \varepsilon_2 &= \frac{k}{2 m_i} \left[ \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) k_i - \tau_0 \right], \\ \varepsilon_3 &= \frac{k}{2 m_i} k_i \Omega \tau_i \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}\right).\end{aligned}$$

Für  $j = 1, 2, 3$ :

$$d_j = -\frac{n_i + n_0}{n_0} [\mathcal{Q}_e \nu_{e0} \alpha_j + \mathcal{Q}_e \nu_{ei} \gamma_j],$$

$$f_j = \frac{1}{n e} [\mathcal{Q}_e \nu_{e0} (\alpha_j + \alpha_j') + \mathcal{Q}_e \nu_{ei} (\gamma_j + \gamma_j')],$$

$$e_j = \mathcal{Q}_e \nu_{e0} \alpha_j'' + \mathcal{Q}_e \nu_{ei} \gamma_j'',$$

$$g_j = -\frac{n_i + n_0}{n_0} [-\mathcal{Q}_e \nu_{ei} \gamma_j + \mathcal{Q}_i \nu_{i0} \beta_j],$$

$$l_j = -\frac{1}{n e} \left[ \frac{m_e}{m_0} \mathcal{Q}_i \nu_{i0} \beta_j + \mathcal{Q}_e \nu_{ei} (\gamma_j + \gamma_j') \right],$$

$$k_j = -\mathcal{Q}_e \nu_{ei} \gamma_j'' + \mathcal{Q}_i \nu_{i0} \varepsilon_j,$$

$$d_3' = d_3 - n e B, \quad g_3' = g_3 + n e B,$$

$$a_j = d_j + g_j, \quad b_j = f_j + l_j, \quad c_j = e_j + k_j.$$

$$F = c_2 - \frac{a_2 (k_3 d_2 - e_3 g_2) + a_3 (k_3 d_3' - e_3 g_3')}{g_3' d_2 - d_3' g_2},$$

$$D = b_3 + \frac{a_2 (l_2 d_2 - f_2 g_2) + a_3 (l_2 d_3' - f_2 g_3')}{g_3' d_2 - d_3' g_2},$$

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{1}{2} p_e \frac{p_i + p_0}{p_0} \left[ k_e \nu_{e0} \right. \\ &\quad \left. + k_i \nu_{i0} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) - \nu_{i0} \tau_0 \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_2 &= \frac{1}{2} p_e \frac{p_i + p_0}{p_0} \left[ -k_e \nu_{e0} \omega \tau_e \right. \\ &\quad \left. + k_i \nu_{i0} \Omega \tau_i \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_3 &= \frac{1}{2} p_e \frac{1}{n e} \left[ k_e \nu_{e0} \left( \frac{3 \nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + k_i \nu_{i0} \frac{m_e}{m_0} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) - \nu_{i0} \tau_0 \frac{m_e}{m_0} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_4 &= -\frac{1}{2} p_e \frac{1}{n e} \left[ k_e \nu_{e0} \omega \tau_e \left( \frac{3 \nu_{ei}}{\nu_{e0}} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - k_i \nu_{i0} \Omega \tau_i \frac{m_e}{m_0} \left(1 + \frac{\tau_0}{\tau_{i0}}\right) \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_{0i}}\right) \right].\end{aligned}$$